14 СЫЗЫҚТЫҚ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР МЕН ОЛАРДЫҢ ЖҮЙЕСІН ШЕШУДІҢ ОПЕРАЦИЯЛЫҚ ӘДІСІ

Тұрақты коэффициентті

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_ny=f(t) \qquad (14.1)$$

сызықтық дифференциалдық теңдеуінің

$$y(0)=c_0, \quad y'(0)=c_1, \quad y^{(n-1)}(0)=c_{n-1},$$

бастапқы шарттарын қанағаттандыратын дербес шешімін табу керек болсын, мұндағы $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$-берілген сандар.

Ізделінді $y(t)$ функциясы, оның қарастырылатын туындылары және $f(t)$ функциясы түпнұсқалар болсын деп есептейік.

$y(t)\div Y(p)=Y$ және $f(t)\div F(p)=F$ болсын. Түпнұсқаны дифференциалдау мен сызықтылық қасиеттерін қолданып (14.1) теңдеуінде түпнұсқалардан кескіндерге өтеміз:

$$\left(p^nY-p^{n-1}c_0-p^{n-2}c_1-\ldots-c_{n-1}\right)+a_1\left(p^{n-1}Y-p^{n-2}c_0-\ldots-c_{n-2}\right)+\ldots+a_{n-1}\left(pY-c_0\right)+a_nY=F.$$

Алынған теңдеуді *операторлық теңдеу* (немесе кескіндердегі теңдеу) деп атаймыз. Оны Y -ке қатысты шешсек:

$$Y\left(p^n+a_1p^{n-1}+\ldots+a_{n-1}p+a_n\right)=F+c_0\left(p^{n-1}+a_1p^{n-2}+\ldots+a_{n-1}\right)+c_1\left(p^{n-2}+a_1p^{n-3}+\ldots+a_{n-2}\right)+\ldots+c_{n-1},$$

яғни $Y(p)\cdot Q_n(p)=F(p)+R_{n-1}(p)$ теңдігін аламыз, мұндағы $Q_n(p)$ және $R_{n-1}(p)$ - p айнымалысынан тәуелді сәйкес n және $n-1$ дәрежелі алгебралық көпмүшеліктер.

Соңғы теңдеуден $Y(p)$ кескінін табамыз:

$$Y(p)=\frac{F(p)+R_{n-1}(p)}{Q_n(p)}. \qquad (14.2)$$

Алынған (14.2) теңдігі (14.1) дифференциалдық теңдеуінің *операторлық шешімі* деп аталады. Егер барлық бастапқы шарттар нөлдік, яғни $y(0)=y'(0)=\ldots=y^{(n-1)}(0)=0$ болса, онда бұл шешім

$$Y(p)=\frac{F(p)}{Q_n(p)}$$

қарапайым түрінде жазылады.

Кескіннің жалғыз болуы туралы теореманың көмегімен, табылған (14.2) кескініне сәйкес $y(t)$ түпнұсқасын анықтай отырып (14.1) дифференциалдық теңдеуінің дербес шешімін табамыз.

Ескерту: Көптеген жағдайларда алынған $y(t)$ шешімі теңдеуді t -ның кез келген мәнінде қанағаттандыратын болады (тек $t\geq 0$ үшін ғана емес).

Операциялық әдіс тұрақты коэффициентті сызықтық дифференциалдық теңдеулер жүйесін шешуде де қолданылады.

Сондай-ақ операциялық есептеулерді айнымалы коэффициентті сызықтық дифференциалдық теңдеулерді, дербес туындылы теңдеулерді, ақырлы айырымдағы теңдеулерді (айырымдық теңдеулерді) шешуде, қатарлардың қосындысын табуда, интегралдарды есептеуде қолдануға болады.